

布西内斯克近似下速度-压力全耦合求解的伪瞬态延拓方法

蔡海鹏¹ 李兆仁¹ 冀文涛¹ 陶文铨¹ 朱江楠² 温泉²

(1. 西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安; 2. 中国航空发动机研究院, 101300, 北京)

摘要: 针对自然对流布西内斯克浮力近似问题, 提出了一种用于压力基速度-压力全耦合求解器的鲁棒性增强与收敛加速方法。首先, 将伪瞬态延拓的算法用于求解稳态计算的流体动力学问题, 通过构造基于流场物理特征的计算方法来确定伪时间步长, 从而替代了传统依赖经验的亚松弛因子; 阐明了该伪时间步长与亚松弛因子在数学上的等效关系, 为实现收敛提供了一种机制更优的路径。其次, 在对控制方程进行离散的同时, 引入了基于特征速度的尺度分析, 通过量化纳维-斯托克斯方程中扩散、对流及浮力项, 给出了针对自然对流问题的伪时间步长计算方案。最后, 选取环形空腔与梯形空腔两类型自然对流问题作为验证算例, 将本文算法与一组常见的亚松弛因子(0.2、0.4、0.6、0.8、0.9、0.95)的设置进行了系统对比。研究结果表明: 相比于传统亚松弛因子方法, 该算法具备较强的自适应性, 无需人工调参, 其收敛效率即可达到或优于通过大量试算确定的经验性最优松弛因子。同时, 在收敛速率与残差控制方面表现的更一致、更稳定。该研究为稳态CFD求解提供了一种兼具自适应性与最优收敛特性的可靠路径, 显著降低了传统方法中对经验调参的依赖。

关键词: 伪瞬态延拓; 布西内斯克浮力近似; 伪时间步长; 亚松弛因子

中图分类号: **文献标志码:** A

文章编号: 0253-987X(XXXX)XX-0001-19

A Pseudo-Transient Extension Method for Fully Coupled Velocity-Pressure Algorithm under the Boussinesq Buoyancy Approximation

CAI Haipeng¹, LI Zhaoren¹, JI Wentao¹, TAO Wenquan¹, ZHU Jiangnan², Wen Quan²

(1. School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. Aero Engine Academy of China, Beijing 101300, China)

Abstract: For the Boussinesq buoyancy approximation in natural convection problems, this paper proposes a robustness-enhanced, convergence-accelerated method for a pressure-based fully coupled velocity-pressure solver. The pseudo-transient continuation (PTC) method is employed to solve steady-state computational fluid dynamics (CFD) problems. By developing a physics-based calculation method

收稿日期: 2025-12-23。

derived from the flow field characteristics to determine the pseudo time step, the traditional empirically-dependent under-relaxation factors are replaced. The mathematical equivalence between this pseudo time step and the under-relaxation factors is clarified, providing a higher efficiency for achieving convergence. During the discretization of the governing equations, a scale analysis based on characteristic velocity is introduced. By quantifying the physical effects of the diffusion, convection, and buoyancy terms in the Navier-Stokes equations, a specific calculation scheme for the pseudo time step tailored for natural convection problems is presented. Finally, two classic natural convection problems-the annular cavity and the trapezoidal cavity-are selected as validation cases. A systematic comparison is conducted between the proposed algorithm and a set of common under-relaxation factors (0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 0.95). The results demonstrate that, compared to the traditional under-relaxation factor approach, the proposed method exhibits remarkable adaptivity. Without any manual parameter tuning, its convergence efficiency matches or surpasses that of the empirically determined optimal relaxation factors obtained through extensive trial calculations. Furthermore, it demonstrates more consistent and stable performance in terms of convergence rate and residual control. This research provides a reliable path for steady-state CFD solvers, offering both self-adaptivity and optimal convergence characteristics, thereby significantly reducing the reliance on empirical parameter tuning inherent in traditional methods.

Keywords: pseudo-transient continuation; boussinesq approximation; pseudo time step; under-relaxation factors

在计算流体动力学中,使用亚松弛的目标是为了限制相邻两次迭代步数间,物理变量的剧烈变化。这种变化可能导致计算发散,尤其在某些对流主导的情形下。选取兼顾鲁棒性与收敛速率的最优亚松弛因子,则高度依赖于所选算法及待处理的问题特性^[1-3]。

关于类似于自适应亚松弛因子的选取方案有很多, Ryoo 等^[4]和 Liu 等^[5]选择残差作为输入变量来控制欠松弛因子,以加快计算速度。基于自适应网络的模糊推理系统 (ANFIS) 也被用于迭代中,亚松弛因子的选择,即使用归一化残差来选择亚松弛因子。而使用当前迭代的残差与上一次迭代残差之间的比

率作为控制输入,则缺点是如果初始松弛因子过大,系统仍会发生发散^[6-7]。

本研究将展示从伪瞬态延拓方法角度考虑自适应亚松弛因子的设置问题,针对自然对流布西内斯克浮力近似流动问题进行检验,该算法可用于求解这一类非光滑的非线性方程。是一种将时间依赖的微分方程高效积分到稳态的方法,该方法的目标不是时间精度,而是解决求解的瞬态行为,直到迭代接近稳态^[8-11]。

在计算流体力学领域,伪瞬态方法因其良好的收敛特性受到广泛关注,并在多个领域的模拟中得到拓展与应用。例如, Stoltze 等^[12]将瞬态松弛方案引入

固体氧化物电解电池的 CFD 模拟中,显著改善了收敛性并缩短了开发周期。Alsaghir 等^[13]则提出将压力梯度视为伪瞬态项,纳入连续性方程,从而规避了原始变量法中常见的兼容性条件与边界条件处理问题,全面提升了因变量的收敛性能。You 等^[1]的研究与本文思路相似,同样指出数值计算的收敛性能(即效率与鲁棒性)主要受控于控制方程中各项间的相互关系,而非残差本身。然而,其研究基于低雷诺数、小尺度网格下的顶盖驱动流与后台阶流问题。相比之下,本文主要求解的是,具有强非线性耦合、高瑞利数及复杂网格的自然对流问题。

在求解器的选择上,本文基于速度-压力全耦合框架,并将伪瞬态延拓法作为核心策略以应对强非线性问题。二者的协同工作,可有效增强计算的收敛性与鲁棒性^[14-17]。

1 控制方程与离散

1.1 自然对流

布西内斯克浮力近似是一个在计算流体动力学中广泛使用的简化模型,主要用于处理由温度差引起的自然对流问题,其核心思想是仅在动量方程的浮力项中保留密度随温度的变化,而在控制方程的其他各项中,将流体视为不可压缩的,且密度取常数^[18]。在纯热驱动的自然对流中,布西内斯克浮力近似具体包含以下3点^[19-20]。

(1)在连续性方程和动量方程的瞬

态项、对流项及黏性扩散项中,流体密度均取参考密度,极大地简化了计算。

(2)在动量方程的源项(重力项)中,密度是温度 T 的函数 $\rho(T)$ 。

(3)假设密度随温度的变化是线性的,可表示为

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (1)$$

式中: ρ 为流体密度; β 为体膨胀系数; T_0 为参考温度; ρ_0 为参考温度 T_0 下的参考密度。

对于由温差驱动的二维自然对流问题,在布西内斯克近似下,其控制方程可如下表示。

连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

动量方程

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \beta(T - T_0) \mathbf{g} \quad (3)$$

能量方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad (4)$$

式中: $\mathbf{u}=(u,v)$ 为二维速度矢量; p 为压力; t 为时间; $\mathbf{g}$ 为重力加速度; ν 为运动黏度; κ 为热扩散率。

本文所有算例采用常物性处理,除浮力项密度随温度线性变化外,黏度、导热系数、定压比热等均在参考温度 T_0 处取常数,参考温度取 $T_0=(T_h+T_c)/2$ (T_h 、 T_c 分别为热壁与冷壁恒温边界值),空气的体积膨胀系数 β 按理想气体近似计算,即 $\beta=1/T_0$ 。

1.2 控制方程的离散

在非结构化网格有限体积法框架下,采用高斯定理对式(2)、(3)进行积分离散。对流项采用一阶迎风格式,以提高全耦合迭代在高瑞利数自然对流工况下的稳定性。然而,该格式可能会引入一定的数值耗散,因此,本文后面将通过两类基准算例与参考结果的对比,并结合网格加密,验证表明关键物理量的预测精度可以满足本研究需求。考虑到离散细节并非本文重点,本文不再展开推导。对于扩散项,针对非结构化网格的非正交性,非正交修正项采用延迟修正处理;压力梯度采用 Green - Gauss 方法计算。离散后的动量方程和连续性方程的表达式为

$$\underbrace{\sum_f \dot{m}_f \mathbf{u}_f}_{\text{对流项}} - \underbrace{\sum_f (\eta_f \nabla \mathbf{u}_f) \cdot \mathbf{S}_f}_{\text{扩散项}} + \underbrace{\sum_f p_f \cdot \mathbf{S}_f}_{\text{压力项}} = \underbrace{\Delta V \cdot \mathbf{S}_g}_{\text{源项}} \quad (5)$$

$$\sum_f \dot{m}_f = \sum_f \rho_f \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f = 0 \quad (6)$$

式中: f 为控制体的面索引; $\dot{m}_f$ 为通过面 f 的质量流量; $\mathbf{u}_f$ 、 η_f 、 $\mathbf{S}_f$ 、 p_f 、 ρ_f 分别为面 f 处的速度矢量、动力黏度、面积矢量、压力、密度; ΔV 为控制体体积; $\mathbf{S}_g = [1 - \beta(T - T_0)]\mathbf{g}$ 作为动量方程的源项。在将 $\mathbf{u}_f$ 与 p_f 进行耦合求解时,由于连续性方程(2)中不显示包含压力变量,若直接联立求解速度与压力,将导致方程系统出现零对角元问题,即所谓的鞍点问题。为此,本文引入 Rhie-Chow 插值方法^[21]以解决此数值困难,其表达

式为

$$\mathbf{u}_f = \overline{\mathbf{u}}_f - \overline{\Gamma}_{pf} ((\nabla p)_f - \overline{(\nabla p)}_f) \quad (7)$$

式中:上划线表示由面 f 两侧相邻控制体中心变量通过线性插值得到的面中心量,因而, $\overline{\mathbf{u}}_f$ 为插值得到的面速度; $\overline{(\nabla p)}_f$ 为由相邻单元中心压力梯度插值得到的面压力梯度; $(\nabla p)_f$ 为相邻单元中心压力差直接离散得到的面压力梯度;定义 $\Gamma_p = \Delta V / a_p^w$ 为由动量方程主对角系数构造的中间系数,其中, a_p^w 为动量方程离散后的主对角系数, $\overline{\Gamma}_{pf}$ 为将 Γ_p 插值至面 f 后得到的修正系数。将式(7)代入式(6)可得

$$\sum_f \rho_f (\overline{\mathbf{u}}_f - \overline{\Gamma}_{pf} ((\nabla p)_f - \overline{(\nabla p)}_f)) \cdot \mathbf{S}_f = 0 \quad (8)$$

对式(8)采用高斯定理得到的表达式为

$$\underbrace{\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})}_{\text{速度耦合项}} - \underbrace{\nabla \cdot (\rho \Gamma_p \nabla p)}_{\text{拉普拉斯项}} = \underbrace{-\nabla \cdot (\rho \overline{\Gamma}_{pf} (\nabla p)^*)}_{\text{源项}} \quad (9)$$

式中: $\nabla \cdot (\rho \overline{\Gamma}_{pf} (\nabla p)^*)$ 为上一迭代步压力场求解结果。在不可压布西内斯克浮力近似自然对流中,压力基速度-压力全耦合求解器的矩阵形式可表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_u & \nabla_h \\ \nabla_h \cdot & -\nabla_h \cdot (\rho \Gamma_p \nabla_h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_u \\ -\nabla_h \cdot (\rho \overline{\Gamma}_{pf} (\nabla_h p)^*) \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中: $\mathbf{A}_u$ 为动量方程离散后的线性算子; ∇_h 和 $\nabla_h \cdot$ 分别表示与当前有限体积离散一致的离散梯度算子与离散散度

算子; $-\nabla_h \cdot (\rho \Gamma_p \nabla_h)$ 为压力方程的离散拉普拉斯型算子; $-\nabla_h \cdot (\rho \overline{\Gamma_p (\nabla_h p)^*})$ 为以散度形式写出的显式修正项。对于二维问题, 该算法的矩阵有如下表达式^[15, 22-24]:

$$\begin{bmatrix} a_p^{uu} & a_p^{uv} & a_p^{up} \\ a_p^{vu} & a_p^{vv} & a_p^{vp} \\ a_p^{pu} & a_p^{pv} & a_p^{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ p_p \end{bmatrix} + \sum_N \begin{bmatrix} a_N^{uu} & a_N^{uv} & a_N^{up} \\ a_N^{vu} & a_N^{vv} & a_N^{vp} \\ a_N^{pu} & a_N^{pv} & a_N^{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_N \\ v_N \\ p_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_p^u \\ b_p^v \\ b_p^p \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中: 下角标 P 、 N 分别表示控制体单元和控制体单元 P 相邻单元的索引; 上角标 uu 、 uv 、 up 、 vu 、 vv 、 vp 、 pu 、 p_v 、 pp 分别表示块系数矩阵中对应于 u 、 v 、 p 的 3 个控制方程与未知量 u 、 v 、 p 的耦合系数。其中上角标前一位表示方程类型, 后一位表示未知量类型。例如, a_p^{uv} 表示控制体单元 P 上 u 方程中变量 v_p 的系数; b_p^p 为连续性方程(式(2))对应的源项; b_p^u 、 b_p^v 为 u 、 v 动量方程(式(3))对应的源项。

伪瞬态延拓方法将基于式(11)的形式进行改进。为求解离散后的全耦合代数方程组, 本文采用两层迭代流程: 外层进行速度-压力全耦合非线性迭代, 在每步中组装线性化方程并更新伪瞬态项; 内层线性系统采用预条件稳定双共轭梯度法 (BiCGSTAB) 求解, 预条件器为 ILUT, 并以前一个外层迭代的解作为初值。当线性残差满足给定容限 10^{-8} 后, 便更新变量并进入下一外层迭代, 直至满足稳态收敛判据 (对动量方

程、连续性方程与能量方程分别监控残差, 3 类方程的残差均小于 10^{-6} 时, 认为其收敛, 并通过质量与能量闭合核查, 保证了稳态解的物理一致性)。

2 伪瞬态延拓方法

2.1 伪瞬态与亚松弛

在数值求解过程中, 尤其是在处理线性或非线性方程组时, 矩阵的条件数与数值稳定性至关重要。为提高矩阵的鲁棒性, 常引入松弛因子, 通过调节迭代步长来抑制解的振荡或发散。对于稳态问题中的速度-压力耦合非线性偏微分方程组, 伪瞬态方法是一种广泛使用的有效策略。该方法将稳态方程转化为伪时间相关的瞬态方程, 通过引入伪时间导数项, 构造一个可时间推进的动力学系统, 从而逐步收敛至稳态解。值得注意的是, 松弛因子方法与伪瞬态方法在方程修正形式上具有明显的相似性。本文将聚焦于自然对流问题, 详细阐述伪瞬态延拓方法在该问题中的实现过程, 并系统分析其收敛性能与计算效率。

用有限体积法离散稳态形式的控制方程后, 其表达式为:

$$a_p^\phi \phi_p + \sum_N a_N^\phi \phi_N = b_p^\phi \quad (12)$$

式中: a_p^ϕ 和 a_N^ϕ 分别为控制方程 ϕ 离散后的中心系数与相邻单元系数; ϕ_p 、 ϕ_N 分别为控制体单元 P 及其相邻控制体单元 N 上的待求物理量; b_p^ϕ 为对应离散方程的右端项; 为增强稳定性, 通常在迭代

中引入亚松弛因子 α , 得到修正形式:

$$\frac{a_p^\phi}{\alpha} \phi_p + \sum_N a_N^\phi \phi_N = b_p^\phi + \frac{1-\alpha}{\alpha} a_p^\phi \phi_p^{\text{old}} \quad (13)$$

式中: ϕ_p^{old} 为控制体单元 P 中上一步求解的物理量。

引入伪瞬态延拓离散稳态方程, 该方程通过控制更新步长来改善收敛行为, 其表达式为

$$\frac{\rho_p \Delta V_p}{\Delta \tau} \frac{\partial \phi_p}{\partial \tau} + a_p^\phi \phi_p + \sum_N a_N^\phi \phi_N = b_p^\phi \quad (14)$$

式中: ρ_p 为控制体单元 P 中的密度; ΔV_p 为控制体单元 P 的体积; τ 为时间。

通过与式(13)的对比, 可揭示两者在构造思路与收敛特性上的内在联系。伪瞬态方法的引入体现在为稳态方程附加一个伪时间推进项, 具体为 $\rho_p \Delta V_p \frac{\partial \phi}{\partial \tau}$ 。此处, 使用向后欧拉法进行时间离散, 离散后的表达式为

$$\rho_p \Delta V_p \frac{\phi_p - \phi_p^{\text{old}}}{\Delta \tau} + a_p^\phi \phi_p + \sum_N a_N^\phi \phi_N = b_p^\phi \quad (15)$$

式中: $\Delta \tau$ 为伪时间步长。经整理系数, 可将其进一步表达为

$$\left(\frac{\rho_p \Delta V_p}{\Delta \tau} + a_p^\phi \right) \phi_p + \sum_N a_N^\phi \phi_N = b_p^\phi + \frac{\rho_p \Delta V_p}{\Delta \tau} \phi_p^{\text{old}} \quad (16)$$

值得注意的是, 此形式与采用隐式亚松弛的稳态方程(12)在结构上完全相同。通过对比未知物理量的系数和方程的右端项, 可以给出, 伪瞬态延拓方法下的 $\Delta \tau$ 和 α 之间的转换关系为

$$\Delta \tau = \frac{\rho_i \Delta V_i}{a_{p,i}} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \quad (17)$$

$$\alpha_i = \frac{a_{p,i}}{a_{p,i} + \rho_i \Delta V_i / \Delta \tau} \quad (18)$$

式中: i 为第 i 个网格单元; ρ_i 、 ΔV_i 、 $a_{p,i}$ 、 α_i 分别为第 i 个网格单元的密度、体积、系数、等效的局部亚松弛因子。

传统的亚松弛方法通常为物理量设置一个全局统一的亚松弛因子 α 。而在伪瞬态延拓方法中, 若选用统一的伪时间步长, 则第 i 个网格单元会自动获得一个 α_i , 其值取决于该单元的 $a_{p,i}$ 、 ρ_i 及 ΔV_i 。这一特征构成了伪瞬态方法的一个核心优点, 用一个全局的 $\Delta \tau$ 即可实现松弛因子在空间上的自适应分布。

该算法在速度-压力全耦合算法矩阵中的具体形式与传统的亚松弛算法类似, 并且同样具有增强矩阵鲁棒性的作用。其伪时间项在矩阵中体现为在对角线上叠加 $\rho \Delta V / \Delta \tau$ 项, 从而增强矩阵的对角占优性, 提高线性求解器的稳定性, 尤其在强耦合情况下有效抑制发散。

在二维速度-压力耦合算法中, 根据式(11), 通用的矩阵形式可分别表示为亚松弛处理后的矩阵形式与伪瞬态延拓处理后的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{a_p^{uu}}{\alpha_u} & a_p^{uv} & a_p^{up} \\ a_p^{vu} & \frac{a_p^{vv}}{\alpha_v} & a_p^{vp} \\ a_p^{pu} & a_p^{pv} & \frac{a_p^{pp}}{\alpha_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ p_p \end{bmatrix} + \sum_N \begin{bmatrix} a_N^{uu} & a_N^{uv} & a_N^{up} \\ a_N^{vu} & a_N^{vv} & a_N^{vp} \\ a_N^{pu} & a_N^{pv} & a_N^{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_N \\ v_N \\ p_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_p^u + \frac{(1-\alpha_u)}{\alpha_u} a_p u_p^{\text{old}} \\ b_p^v + \frac{(1-\alpha_v)}{\alpha_v} a_p v_p^{\text{old}} \\ b_p^p + \frac{(1-\alpha_p)}{\alpha_p} a_p p_p^{\text{old}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} a_p^{uu} + \rho_i \Delta V_i / \Delta \tau & a_p^{uv} & a_p^{up} \\ a_p^{vu} & a_p^{vv} + \rho_i \Delta V_i / \Delta \tau & a_p^{vp} \\ a_p^{pu} & a_p^{pv} & a_p^{pp} + \beta_i \Delta V_i / \Delta \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \\ p_p \end{bmatrix} + \sum_N \begin{bmatrix} a_N^{uu} & a_N^{uv} & a_N^{up} \\ a_N^{vu} & a_N^{vv} & a_N^{vp} \\ a_N^{pu} & a_N^{pv} & a_N^{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_N \\ v_N \\ p_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_p^u + \rho_i \Delta V_i u_p^{\text{old}} \\ b_p^v + \rho_i \Delta V_i v_p^{\text{old}} \\ b_p^p + \beta_i \Delta V_i p_p^{\text{old}} \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中: u_p^{old} 、 v_p^{old} 、 p_p^{old} 分别为前一次迭代控制体单元 P 处速度分量 u 、 v 及压力的取值。

同时, Rhie-Chow 等压力-速度插值^[21]仍需保留, 伪时间项并不能替代避免棋盘格压力场的数值技巧, 而是作为进一步提升矩阵鲁棒性的手段。另外, 本文聚焦于离散后的纳维-斯托克斯方程的伪瞬态算法, 关于压力方程中伪瞬态特征时间常数的选取, 不作讨论。

2.2 鲁棒性分析

在有限体积法中, 每个网格单元通过对流与扩散作用与相邻单元耦合, 形

成线性方程组的系数矩阵。对于非相邻单元, 其耦合系数为零。通过引入物理时间项(瞬态求解)或松弛因子(稳态求解), 可以增强系数矩阵主对角线元素的数值权重, 从而提升矩阵的对角占优性。这一特性是许多迭代求解器稳定收敛的关键, 它有效增强了离散系统的数值稳定性。

对任意网格单元, 伪瞬态在主对角线上增加了 $\rho \Delta V / \Delta \tau$, 若满足

$$a_p + \frac{\rho \Delta V}{\Delta \tau} > \sum_N a_N \quad (21)$$

则离散系统趋于严格对角占优。这不仅增强了传统点迭代(如 Jacobi、

Gauss-Seidel) 的收敛性, 更重要的是能够显著改善现代 Krylov 子空间法 (如 BiCGSTAB) 的收敛条件——通过降低系统矩阵的谱条件和条件数, 使双共轭梯度类求解器在求解线性系统时更为高效稳定。相比之下, 亚松弛通过减小有效耦合项达到相近效果, 但伪瞬态的优势在于: 同一 $\Delta\tau$ 会依据每个网格单元 ρ_i , ΔV_i 和 $a_{p,i}$ 的不同自适应而产生不同的 α_i 。

伪瞬态算法只改变代数系统的数值性质, 不改变稳态解, 对真实非稳态问题不适用。对于密度不为常数、网格体积大小差别大的情形, α_i 表现出更灵活的空间自适应性, 但仍需配合稳定的压力-速度插值格式与合适的预条件器以保障整体的求解效率。

2.3 伪时间步长 $\Delta\tau$ 的确定方法

伪瞬态方法的计算效率与数值稳定性, 很大程度取决于伪时间步长 $\Delta\tau$ 与系统内在物理过程特征时间的匹配程度。参考伪时间步长的确定应以物理过程特征时间为依据, 使其能够反映物理信息在计算域内传播的动态过程, 这是构建高效伪瞬态算法的理论核心, 其表达式为

$$\Delta\tau_{\text{ref}} = \frac{L_{\text{scale}}}{U_{\text{ref}}} \quad (22)$$

式中: $\Delta\tau_{\text{ref}}$ 为所求的参考伪时间步长; L_{scale} 为几何模型的特征长度; U_{ref} 为流动的特征速度。在存在明确流动方向的强制对流中, 例如管内流动, 可直接采用

特征速度为入口流速, 此时该时间尺度可近似描述为流体微团穿越计算域所需的平均时间。

对于复杂的多物理场耦合问题, 如浮力驱动流动, 其特征时间往往是多种机制竞争的结果。此时, 应通过分析主导控制方程中, 关键源项与惯性项的平衡关系来导出, 特征长度 L 的选取通常与计算域的几何建模相关, 本文不作深入探讨。

在伪瞬态方法中, 出于保证计算稳定性的考虑, 通常倾向于采取一种保守的策略。由数值稳定性理论 (如 Kelley 等^[9]和 Coffey 等^[25]所述) 可知, 较小的伪时间步长通常有助于构建对角占优性更强、鲁棒性更高的离散系统, 这一特性亦可从类似于式(19)与式(20)的矩阵构造中得以体现。根据关系式 $\Delta\tau \propto L/U_{\text{ref}}$, 为了获得一个较小的 $\Delta\tau$, 应选择一个较大的参考特征速度 U_{ref} 。因此, 在选取特征速度时, 本文遵循在符合物理实际的前提下, 选择一个足够大的 U_{ref} , 以获得较小的、有利于稳定的参考伪时间步长 $\Delta\tau_{\text{ref}}$ 。尽管相关文献中存在基于当地速度尺度等更为积极的策略 (旨在加速收敛), 但数值实践表明, 当前采用的方案通常能提供更优的数值稳健性, 这对于保障非线性问题的迭代收敛至关重要。

将自然对流控制方程的动量方程 (3) 写成张量形式, 表达式为

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - g_i \beta (T - T_0) \quad (23)$$

式中: u_i 、 u_j 分别为速度矢量在 x_i 、 x_j 方向上的分量; x_i 、 x_j 为坐标分量; g_i 为重力加速度。

表1为引入特征尺度和相应的无量

纲变量,表中, ΔT 为参考温差; p_{hyd} 为静水压力。将表1中的无量纲变量带入式(23),可得到自然对流布西内斯克浮力近似的无量纲动量方程式,表达式为

$$u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\nu}{U_{\text{ref}} L} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} - \frac{g_i \beta \Delta T L}{U_{\text{ref}}^2} T^* \quad (24)$$

式(24)从左至右依次为对流项、压力项、扩散项、浮力项。为确定粘性主导的特征速度,并考虑粘性力与惯性力量级相当的情形,则粘性扩散项应与惯性项同量级,即要求

$$\frac{\nu}{U_{\text{ref}} L} \sim 1 \quad (25)$$

由此可得

$$U_{\text{ref}}^{(\text{vis})} = \frac{\nu}{L} \quad (26)$$

式中: $U_{\text{ref}}^{(\text{vis})}$ 为黏性主导的特征速度; ~ 1 表示该无量纲量的量级为1(同阶)。

该速度尺度表征了粘性效应主导下,动量在特征长度 L 上扩散的典型速率。为确定浮力主导的特征速度,并考虑浮升力与惯性力量级相当的情形,则浮力项应与惯性项同量级,即要求

$$\frac{g \beta \Delta T L}{U_{\text{ref}}^2} \sim 1 \quad (27)$$

由此解得浮力驱动的特征速度为

$$U_{\text{ref}}^{(\text{buoy})} = \sqrt{g \beta \Delta T L} \quad (28)$$

式中: $U_{\text{ref}}^{(\text{buoy})}$ 为浮升力主导的特征速度。

另外,使用了伪瞬态项中的参考时间计算公式为

$$\Delta \tau_{\text{ref}} = \sqrt{\frac{L_0}{\beta g (T_{\text{max}} - T_{\text{min}})}} \quad (29)$$

式中: L_0 为几何特征长度; T_{max} 、 T_{min} 分别为计算域内温度的上、下限。由式(28)、(29)得到的特征速度与参考伪时间步长用于伪瞬态延拓项的量纲估计和初始取值。该式的适用范围建立在不可压、常物性与布西内斯克近似的自然对流控制方程之上,并以浮力、黏性扩散与惯性项的量级平衡为尺度分析基础。对于存在明确主流方向的强制对流问题或是引入额外源项的情形,应重新评估主导项平衡关系以修正 U_{ref} 与 $\Delta \tau$ 。在此基础上,本文选取环形空腔和梯形空腔两类典型自然对流算例,对上述伪瞬态时间尺度的构造及其在实际计算中的稳定性和收敛性能进行验证。

3 算例验证

3.1 环形空腔自然对流

图1展示了环形空腔自然对流的几何构型,其中 θ 为极径与 x 轴正方向之间的夹角。在该模型中,内壁面维持恒定高温 T_{in} ,外壁面维持恒定低温 T_{out} ,两者之间的温差引发密度变化所产生的

浮升力,驱动了腔内流体的自然对流运动。环形空腔的外径与内径之比为 $r_{\text{out}}/r_{\text{in}}=2.6$;流体介质为空气,其普朗特数 Pr 为0.7。该流动的强度由瑞利数 Ra 表征,其定义式为

表1 无量纲变量定义表

Table 1 Definitions of dimensionless variables.

物理量	符号	无量纲	定义公式
几何长度	x	x^*	$x^* = \frac{x}{L}$
速度	u	u^*	$u^* = \frac{u}{U_{\text{ref}}}$
温度	T	T^*	$T^* = \frac{T - T_0}{\Delta T}$
压力	p	p^*	$p^* = \frac{p - p_{\text{hyd}}}{\rho_0 U_{\text{ref}}^2}$

$$Ra = Pr \cdot Gr = \frac{g \beta_{\text{air}} L_{\text{ann}}^3 (T_{\text{in}} - T_{\text{out}})}{\nu \kappa}$$

(30)式中: g 为重力加速度; L_{ann} 为环形空腔内外壁面间的距离作为特征长度; β_{air} 为环形空间内空气的热膨胀系数。

经网格无关性验证后,本算例采用的网格单元数为13083。为了验证自编

耦合式求解器的准确性,将本研究的仿真结果与Kuehn等^[26]的仿真结果进行对比。图2展示的是环形空腔自然对流的流线和温度场在空间内的分布。从定性结果来看,流动在环形空腔底部区域较为微弱,而在顶部区域则较为剧烈,且在内壁面附近可观察到显著的温度梯度。对比左右两图可见,本研究与文献[26]中的流型结构及温度分布形态高度一致。

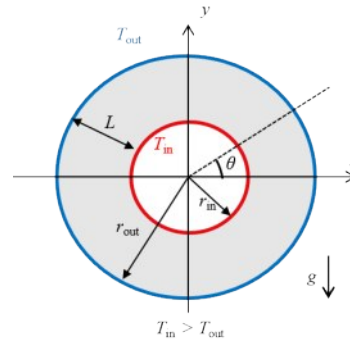


图1 环形空腔自然对流模型

Fig. 1 Natural convection model for annular cavities.

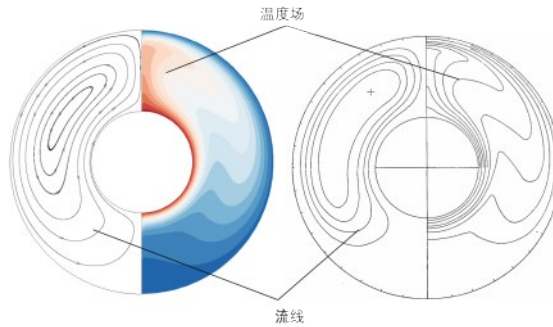


图2 环形空腔流线和温度场仿真结果对比

Fig. 2 Comparison of streamlines and temperature field in the annular cavity

(a) 本文的仿真结果 (b) 文献[26]的仿真结果

在此基础上,进一步开展定量分析,针对有限空间自然对流的换热问题,常采用当量导热系数 λ_{eq} 对数据进行整理,其表达式为

$$\lambda_{eq}(\theta) = \left(\frac{q_{conv}}{q_{cond}} \right)_\theta \quad (31)$$

式中: q_{conv} 为存在自然对流时内表面(或外表面)上局部的热流密度分布; q_{cond} 为按两圆柱表面的纯导热公式计算的热流密度, $\lambda_{eq}(\theta)$ 为圆周角位置处的局部当量导热系数。计算后得到的结果如图3所示。

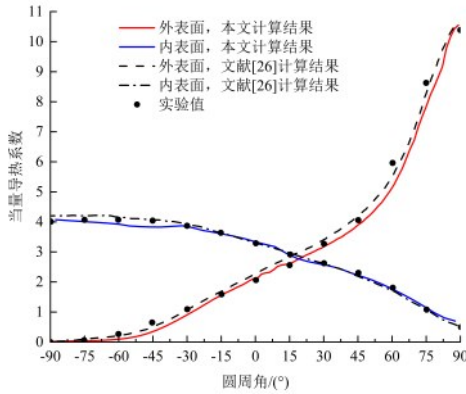


图3 瑞利数为 5×10^4 下环形空腔内外壁当量导热系数的对比

Fig. 3 Comparison of the equivalent thermal conductivity at the inner and outer walls of the annular cavity at a Rayleigh number of 5×10^4

图3给出了本文自编压力基全耦合求解器,计算得到的环形空腔内、外壁当量导热系数与文献[26]结果的对比。其中,黑点所代表的实验值,被认为是环形空腔自然对流模型的基准解。由图

可知,本文算法的结果精度较高,与实验值和文献[26]的模拟值高度匹配。此外,仿真值与实验值的相对误差大多在 -12% 到 2% 之间,平均相对误差为 -5.67% 。

为了评估伪瞬态延拓方法的性能,本研究将其与一组常见的亚松弛因子($\alpha=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 0.95$)应用于环形空腔算例,并对迭代次数进行了对比。如图4和图5所示,在瑞利数为 5×10^4 和 10^5 的工况下,伪瞬态方法在驱使残差收敛至 10^{-6} 时,均表现出稳定且高效的收敛特性。

与传统亚松弛因子方法相比,伪瞬态算法表现出显著的自适应能力。在本算例中,传统方法需依赖经验选择亚松弛因子,且仅在亚松弛因子设置为0.9时取得最佳表现(Ra 为 5×10^4 时,收敛步数为189, Ra 为 10^5 时,收敛步数为191);而伪瞬态算法无需任何人工调参,即能达到与之相当甚至更优的收敛效率(Ra 为 5×10^4 时,收敛步数为185, Ra 为 10^5 时,收敛步数为196)。

图6详细展示了 Ra 为 5×10^4 时,伪瞬态延拓与亚松弛因子两种方法的残差随迭代步数的变化。由图可知,两者的收敛趋势基本一致,并且在迭代中期(残差收敛到 10^{-5} 前)伪瞬态延拓方法有着更快的收敛速度。

3.2 梯形空腔自然对流

为准确捕捉自然对流在复杂边角区域的真实物理场,本文借鉴 Moukalled

等^[27]所采用的非对称几何模型。该设计避免了对称性假设的潜在局限,能够有效检验数值算法对于局部回流区、死区

及边界层发展的模拟精度,梯形空腔自然对流模型如图7所示。

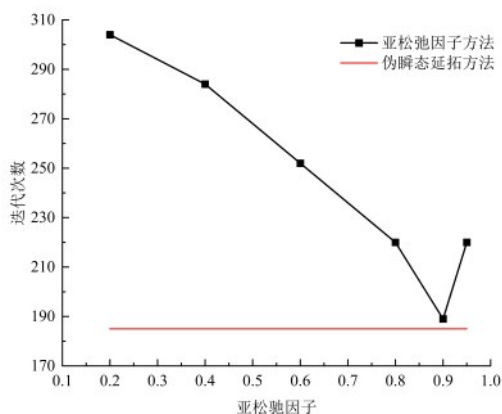


图4 瑞利数为 5×10^4 下, 环形空腔算例的迭代次数对比

Fig. 4 Comparison of iteration counts for annular cavity case at a Rayleigh number of 5×10^4

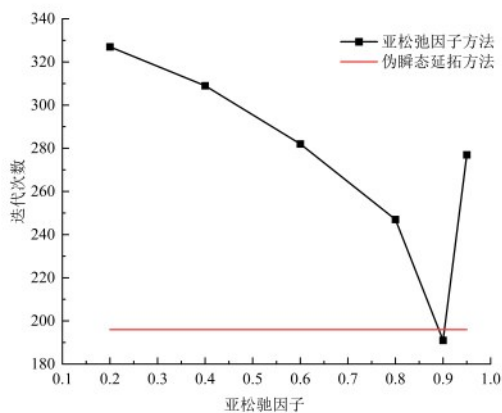


图5 瑞利数为 10^5 下, 环形空腔算例的迭代次数对比

Fig. 5 Comparison of iteration counts for annular cavity case at a Rayleigh number of 5×10^4

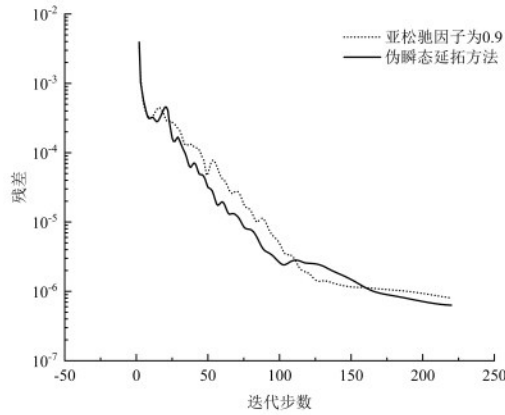


图6 残差收敛随迭代步数的变化曲线

Fig. 6 Curve of residual convergence variation with iteration steps

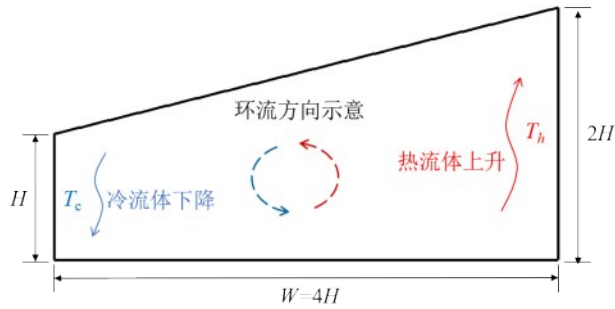


图7 梯形空腔自然对流模型

Fig. 7 Natural convection model in a trapezoidal cavity

图7中, 腔体宽度 W 为短垂直壁高度 H 的4倍腔。腔体右侧高度为左侧的2倍。左壁为冷壁温度 T_c , 右壁为热壁温度 T_h 。上下壁面采用绝热边界, 该类边界条件的设置对应于沿上部倾斜平面产生的浮力阻碍模式。在伪时间尺度构造中取 $L_0=L_{scale}=H$, $T_{max}=T_h$, $T_{min}=T_c$, 参考温度 $T_0=(T_h+T_c)/2$ 。图8所示的是计算所用的网格。其中, 边界进行了加密处理, 网格总数量为19 251, 并经过网格

无关性验证。

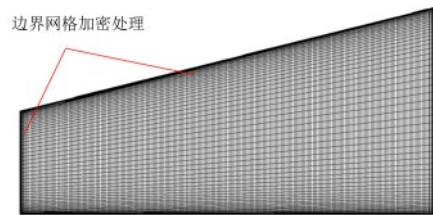


图8 梯形空腔网格划分结构

Fig. 8 Grid structure of the trapezoidal cavity.

图9和图10给出了瑞利数为 10^6 下, 梯形空腔自然对流的温度和流线分布结果的对比。由图可知, 右侧热壁面气流是由下至上流动, 左边冷侧壁面气流则

是从上至下流动。同时, 可以观察到, 紧靠壁面附近有很大的温度梯度, 这与文献[27]的仿真结果相符。

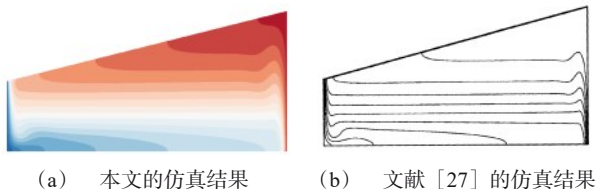


图9 梯形空腔自然对流温度分布的对比

Fig. 9 Comparison of temperature distributions for natural convection in the trapezoidal cavity.

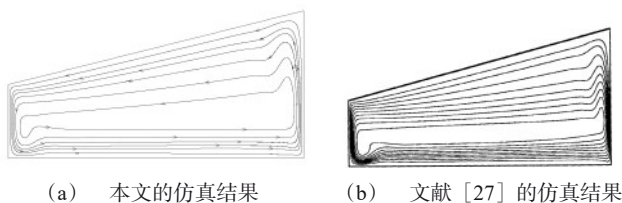


图10 梯形空腔自然对流流线分布的对比

Fig. 10 Comparison of streamline patterns for natural convection in the trapezoidal cavity.

该算例采用以下无量纲变量进行定量分析, 两侧壁面的局部努塞尔数 Nu 的定义式为

$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (32)$$

式中: L 为特征长度, 分别取值为两侧的壁面高度; h 为对流换热系数; k 为导热系数。根据牛顿冷却公式与傅里叶导热定律可得 h 的表达式为

$$\begin{cases} \dot{Q} = hA(T_h - T_c) = -kA \frac{dT}{dx} \\ h = -\frac{k}{H} \frac{dT^*}{dx^*} \end{cases} \quad (33)$$

式中: Q 为热流量; A 为换热面积; 无量纲长度 x^* 和无量纲温度 T^* 的表达式见表1, 其中参考温差 $\Delta T = T_h - T_c$ 。

图11分别展示了冷、热两壁面的局部努塞尔系数分布曲线, 并与文献[27]进行对比。图中, $Y/Y_{\max}$ 为无量纲高度, 用于表征梯形空腔左右两侧侧壁高度的位置参数。由图可知, 两侧壁面

局部努塞尔数的发展趋势与文献[27]一致,热侧壁面的局部努塞尔数最大偏差

约为17%,冷侧壁面局部努塞尔数最大偏差约为9%。

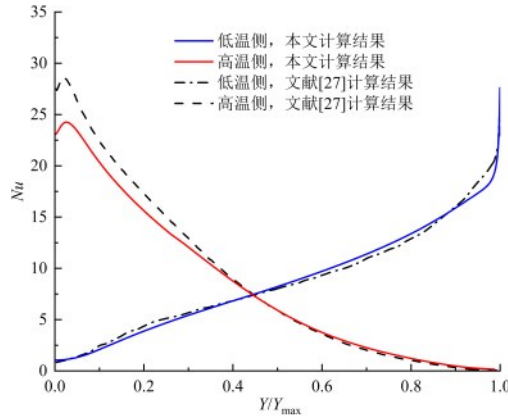


图 11 瑞利数为 10^6 下, 梯形空腔自然对流局部努塞尔系数随无量纲高度的变化曲线

Fig. 11 Local Nusselt number variation curve along the height for natural convection in the trapezoidal cavity at a Rayleigh number of 10^6

为了系统评估伪瞬态延拓方法在不同流态下的适用性, 本研究进一步在更高瑞利数下开展了对比验证。图 12 和图 13 展示了 Ra 分别为 10^5 与 10^6 的工况下, 梯形空腔算例使用伪瞬态方法与一组固定亚松弛因子 ($\alpha=0.2、0.4、0.6、0.8、0.9、0.95、0.98$) 的收敛性能对比。

结果表明, 伪瞬态方法在不同强度的自然对流中均展现出良好的鲁棒性。具体而言, 在 Ra 为 10^6 时, 传统方法需将亚松弛因子设置为 0.8 方可获得最优收敛, 所需步数为 659; 而伪瞬态延拓方法在无需任何人工干预的情况下, 达到收敛标准的步数仅为 657, 且收敛效率相当。在 Ra 为 10^5 的工况中, 传统方法的最佳松弛因子为 0.95, 收敛步数为

403; 伪瞬态延拓方法虽略多于此最优值 (收敛步数为 428), 但仍显著优于其他非最优的松弛因子设置, 且避免了繁琐的参数试错过程。

图 14 中进一步给出了 Ra 为 10^6 的工况下, 残差随迭代步数的变化曲线。由图可知, 伪瞬态延拓方法的收敛轨迹与最优松弛因子为 0.8 下的轨迹高度一致, 且在收敛中前期展现出了更好的收敛性, 体现了其自适应时间步长在强非线性问题中的数值优势。这一系列结果说明, 伪瞬态延拓方法在宽瑞利数范围内, 均能提供稳定且接近最优的收敛性能, 有效降低了传统方法中对经验性参数调优的依赖。

以上结果凸显了伪瞬态延拓方法的核心优势: 在实际仿真中, 最佳松弛因

子通常难以预先确定,而该方法通过其内在的物理机制自动调整收敛进程,有效避免了繁琐的人工参数调试,体现了

其作为自适应求解方法的鲁棒性与工程实用价值。

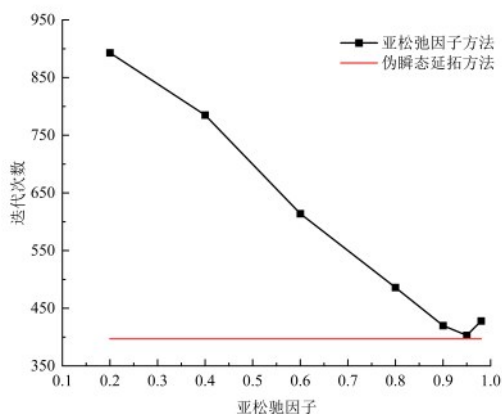


图 12 瑞利数为 10^5 下, 梯形空腔算例的迭代次数对比

Fig. 12 Comparison of iteration counts for trapezoidal cavity case at a Rayleigh number of 10^5

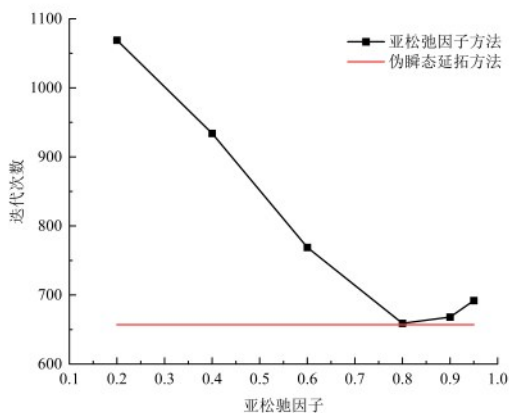


图 13 瑞利数为 10^6 下, 梯形空腔算例的迭代次数对比

Fig. 13 Comparison of iteration counts for trapezoidal cavity case at a Rayleigh number of 10^6

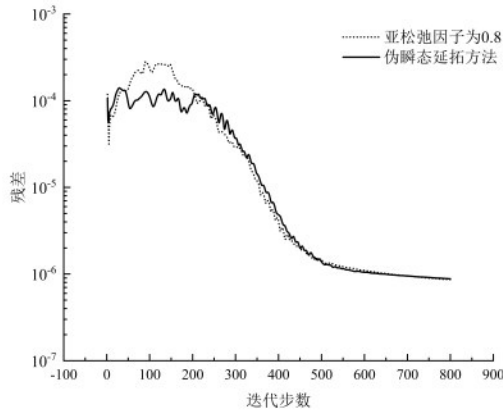


图 14 残差收敛随迭代步数变化曲线

Fig. 14 Residual convergence versus iteration number

值得强调的是,本文所采用的伪瞬态延拓方法在速度-压力全耦合求解框架下,对于高瑞利数自然对流问题展现出良好的数值稳定性。随着瑞利数的升高,流场的非线性性增强,传统基于SIMPLE算法的分离式求解策略在亚松驰因子接近或超过0.9时,常出现残差震荡甚至发散的现象,难以实现稳定收敛,从而限制了不同亚松驰因子的全面比较^[5]。相比之下,本文算法在同等高瑞利数条件下,未出现发散或收敛震荡的问题,在保持全耦合算法鲁棒性的同时,实现了接近于最优松驰因子的收敛性能,体现出在强非线性流动中良好的自适应能力。

4 结论

通过建立亚松驰因子与伪瞬态延拓方法中特征时间的关联,在自然对流布西内斯克浮力近似前提下,提出并验证

了一种适用于速度-压力全耦合框架的自适应松驰方案。该方案的核心优势在于其为解决高度非线性或多物理场问题中,经验性选取松驰因子的难题,提供了一个具有物理意义的参考标准。本文得到如下主要结论。

(1) 在浮力驱动的对称(环形空腔)与非对称(梯形空腔)自然对流算例中,本方法表现稳健。其收敛效率虽在个别情况下略逊于经反复调试所得的最优固定亚松驰因子,但成功避免了因亚松驰因子选取不当而导致的迭代激增、收敛震荡或发散风险。这种一次设定,稳定收敛的特性,显著降低了用户的试错成本与时间开销。

(2) 在处理自然对流问题时,分离式求解器在亚松驰因子达到0.9后容易出现残差振荡甚至发散,使得其难以在稳定收敛的前提下,对高松驰因子方案进行全面而公平的性能对比。相比之

下, 本文的伪瞬态延拓方法可以与全范围的亚松弛因子进行评估对比。

(3) 伪瞬态延拓方法的算法框架具有一定的拓展潜力。其核心思想是通过分析动量方程中各物理项的相对重要性, 自适应地主导伪时间步长的推进。该方法可推广至更广泛的流动问题。

参考文献

- [1] YOU W, LI Z-Y, TAO W-Q. A general self-adaptive under-relaxation strategy for fast and robust convergence of iterative calculation of incompressible flow [J]. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 2020, 77(4): 299-310.
- [2] GEE M W, KELLEY C T, LEHOUCQ R B. Pseudo-transient continuation for nonlinear transient elasticity [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, 78(10): 1209-1219.
- [3] 刘家宁, 杨靖丞, 钟文荣, 等. 超临界氢用空温式气化器的传热特性研究 [J]. 真空与低温, 2024, 30(4): 408-416.
- [4] RYOO J, KAMINSKI D, DRAGOJLOVIC Z. A Residual-Based Fuzzy Logic Algorithm for Control of Convergence in a Computational Fluid Dynamic Simulation [J]. Journal of Heat Transfer, 1999, 121(4): 1076-1078.
- [5] LIU X L, TAO W Q, ZHENG P, 等. Control of convergence in a computational fluid dynamic simulation using fuzzy logic [J]. SCIENCE IN CHINA SERIES E-TECHNOLOGICAL SCIENCES, 2002, 45(5): 495-502.
- [6] JUNTAEK R, DRAGOJLOVIC Z, KAMINSKI D A. Control of convergence in a computational fluid dynamics simulation using ANFIS [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2005, 13(1): 42-47.
- [7] 商贺, 彭敏俊, 夏庚磊, 等. 二维下腔室稳态流场降阶模型开发 [J]. 原子能科学技术, 2025, 59(10): 2319-2331.
- [8] KELLEY C T, LIAO L-Z, QI L, 等. Projected Pseudotransient Continuation [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2008, 46(6): 3071-3083.
- [9] KELLEY C T. Numerical methods for nonlinear equations [J]. Acta Numerica, 2018, 27: 207-287.
- [10] 陈曦, 于玉贞, 程勇刚. 非饱和渗流 Richards 方程数值求解的欠松弛方法 [J]. 岩土力学, 2012, 33(S1): 237-243.
- [11] 康杰, 樊桦, 吴东垠. 流场特性驱动的亚松弛因子自动获取方法 [J]. 西安交通大学学报, 2025, 59(4): 40-49.
- [12] STOLTZE F, CHAMPHEKAR O, IRANZO A. Upscaling solid oxide electrolysis cell CFD simulations for hydrogen production [J]. Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics, 2025, 19(1): 2521529.
- [13] ALSAGHIR A M, MISHRA S, ABDALLAH S, 等. A pseudo-transient pressure gradient method for solving the incompressible Navier - Stokes equations [J]. Physics of Fluids, 2025, 37(1): 013618.
- [14] DARWISH M, SRAJ I, MOUKALLED F. A coupled finite volume solver for the solution of incompressible flows on unstructured grids [J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(1): 180-201.
- [15] DENG G B, PIQUET J, VASSEUR X, 等. A new fully coupled method for computing turbulent flows [J]. Computers & Fluids, 2001, 30(4): 445-472.

- [16] 刘凯,陈叔平,赵国锋,等. 基于流固耦合传热的液氢管道流动特性仿真研究 [J]. 真空与低温, 2024, 30(5): 580-588.
- [17] 刘春,何舰. 改进 Coupled 算法在翼型气动性能计算中的应用 [J]. 科学技术与工程, 2018, 18(2): 174-179.
- [18] CRAWFORD L, LEMLICH R. Natural Convection in Horizontal Concentric Cylindrical Annuli [J]. Engineering & Chemistry Fundamentals, 1962, 1(4): 260-264.
- [19] 马崇扬,张东辉,邓云,等. 具有导热的竖环形封闭腔内自然对流数值研究 [J]. 原子能科学技术, 2016, 50(7): 1186-1192.
- [20] 刘镇涛,肖莉,和琨,等. 二维局部受热腔体内电热对流问题模拟和分析 [J]. 力学学报, 2021, 53(9): 2477-2492.
- [21] RHIE C M, CHOW W L. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation [M]. AIAA Journal. 1983: 1525-1532.
- [22] CHEN Z J, PRZEKWAŚ A J. A coupled pressure-based computational method for incompressible/compressible flows [J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(24): 9150-9165.
- [23] UROÍĆ T, JASAK H, RUSCHE H. Implicitly Coupled Pressure - Velocity Solver [M]//NÓBREGA J M, JASAK H. OpenFOAM® : Selected Papers of the 11th Workshop. Cham; Springer International Publishing. 2019: 249-267.
- [24] XIAO C N, DENNER F, VAN WACHEM B G M. Fully-coupled pressure-based finite-volume framework for the simulation of fluid flows at all speeds in complex geometries [J]. Journal of Computational Physics, 2017, 346: 91-130.
- [25] COFFEY T S, KELLEY C T, KEYES D E. Pseudotransient continuation and differential-algebraic equations [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2003, 25(2): 553-569.
- [26] KUEHN T H, GOLDSTEIN R J. An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1976, 74(4): 695-719.
- [27] MOUKALLED F, DARWISH M. NATURAL CONVECTION IN A PARTITIONED TRAPEZOIDAL CAVITY HEATED FROM THE SIDE [J]. Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, 2003, 43(5): 543-563.